

חדוֹא 2

פרק 34 - פונקציות הומוגניות- משפט אוילר

תוכן העניינים

1	1. פונקציות הומוגניות
4	2. משפט אוילר

פונקציות הומוגניות

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאייה סדר :

$$f(x, y) = x^3 \sqrt{y} + y^3 \sqrt{x} \quad (1)$$

$$h(x, y) = \frac{\ln(e^{5x})}{\sqrt[3]{ex^6 - 7y^6}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \ln(4^x) \cdot g\left[\frac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right] \quad (3)$$

4) נתון כי $(x, y) \in$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדקו האם הפונקציה $f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} + \frac{1}{z(x, y)} - 4$ הומוגנית.
במידה והפונקציה לא הומוגנית, השמיימו ממנה חלק,
כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.
מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

5) מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר α , כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.
כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה- α שנמצאה.

$$f(x, y) = \frac{x^4 y + x y^\alpha}{4x + 10y} \quad \text{א.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} (\ln \alpha x - \ln y) \quad \text{ב.}$$

6) בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז אם נחלק אותה ב- x^n ,

$$\text{נקבל פונקציה של } \frac{y}{x}.$$

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2. \quad 1$$

$$f(x, y) = \sqrt{x+y}. \quad 2$$

ב. הוכחו את הטענה לעיל.

הערה

ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:

אם פונקציה היא הומוגנית מסדר n , אז קיימת פונקציה $(g(t))$, כך ש- $t = \frac{y}{x}$

$$\text{הקיימת } \frac{f(x, y)}{x^n} = g(t).$$

7) תהינה f ו- g פונקציות ב- n משתנים, והומוגניות מסדר r_1 ו- r_2 , בהתאם.
קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאייה דרגה:

$$f+g \quad \text{. א.} \quad \frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}} \quad \text{. ב.} \quad \frac{f}{g} \quad \text{. ג.} \quad f \cdot g \quad \text{. ד.}$$

8) נתון כי f פונקציה הומוגנית מסדר 4.

$$\text{ידוע כי } f(1, 2) = 4, f_x(1, 2) = ?$$

$$\text{חשבו את } f(2, 4), f(0.5, 1), f_x(2, 4), f_x(1.5, 3).$$

9) נתונה פונקציה $f(x, y) = x^4 + y^2 z(x, y)$.
ידוע כי z פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4, 10) = 1$.

$$\text{א. חשבו את } f(2, 5).$$

$$\text{ב. ידוע כי } f_x(1, 1) = 4.$$

$$\text{חשבו את } f_x(a, a), \text{ לכל קבוע } a.$$

תשובות סופיות

(1) הומוגנית מסדר 3.5.

(2) הומוגנית מסדר 1.

(3) הומוגנית מסדר 1.

(4) הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השטחת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:

$$f(x, y) = \frac{x}{y^4} + \frac{1}{z(x, y)} \quad \text{הומוגנית מסדר 3.}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}} \quad \text{הומוגנית מסדר 2.}$$

$$f(x, y) = -4 \quad \text{הומוגנית מסדר 0.}$$

(5) א. עבור $\alpha = 4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha > 0$.

$$g(t) = \sqrt{1+t} \quad .2 \quad g(t) = 1-t+2t^2 \quad .1. \quad \text{ב. הוכחה.}$$

(6) א. הומוגנית מדרגה $r_1 - r_2$. ב. הומוגנית מדרגה $r_1 + r_2$.

$$\text{ג. הומוגנית מדרגה } .2r_1 - \frac{r_2}{n}$$

ד. הומוגנית מדרגה r_1 רק אם $r_1 = r_2$. אחרת לא הומוגנית.

$$f_x(2, 4) = 80, \quad f_x(1.5, 3) = 33.75, \quad , f(2, 4) = 64, \quad f(0.5, 1) = \frac{1}{4} \quad (8)$$

$$f_x(a, a) = 4a^3 \quad \text{ב.} \quad f(2, 5) = \frac{1}{16} \quad \text{א.} \quad (9)$$

משפט אוילר

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$.

- א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.
- ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש- $f(x, y) = f(y)$ הומוגנית מסדר 0.

$$\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y}{x}$$

$$\cdot f(x, y) = \frac{e^y (x+y)}{(x-y)(\ln x - \ln y)}$$

$$\text{הוכיחו כי } x \cdot f_x = -y \cdot f_y$$

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי פונקציית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הניחו כי m קבוע חיובי.

- ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

- ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $1 = u_x(2, 2) + u_y(1, 1)$.

4) תהי f פונקציה הומוגנית מסדר 2,

$$\cdot h(x, y) = x^2 - y^2 + f\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$$

- א. הוכיחו כי h הומוגנית מסדר 2.

- ב. נתון : $f(8, 1) = 16$, $h_x(6, 3) = 9$

- מצאו את $h_y(2, 1)$ ואת $h(2, 1)$

5) f ו- g הין פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאם. נגידר :

$$f(x, y) = (x+y)h(x, y) + \frac{\sqrt{g(x, y)}}{x^2 + y^2}$$

א. הוכיחו כי f הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון : $f'_x(2, 16) = 12$, $f'_y(1, 8) = 3$, $h(4, 32) = 16$

מצאו את $f(1, 8)$ ואת $g(1, 8)$

6) f הומוגנית מסדר 4, g הומוגנית מסדר 2 ו- h הומוגנית מסדר 0.

$$\text{נגידר פונקציה } p(x, y) = f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)$$

$$\text{נתון : } f'_x(2, 4) = 64, \quad f'_y(-1, -2) = -4, \quad h\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{5}{2}, \quad p(1, 2) = \frac{7}{2}$$

חשבו את $p\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

7) הפונקציה $f(x, y)$ הומוגנית מסדר 3. הנתונים בشرطוט.

א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את ערך הסכום $f'_x(4, 8) + 2f'_y(4, 8)$

ג. נגידר פונקציה חדשה $u(x, y)$

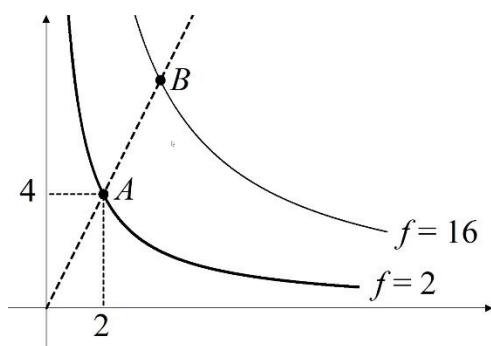
$$u(x, y) = (f(x, y))^2$$

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u'_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f'_x(x, y)$

הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי $x \cdot u'_x(x, y) + y \cdot u'_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$

היעזרו בסעיף הקודם ובנתונים על f



8) תהי $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר m ,

$$\text{המקיימת } f(2,1) = 27 \text{ ו- } f(6,3) = 243.$$

א. מצאו את סדר ההומוגניות, m .

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברתعش"ע של f .

העבירות משיק לעש"ע בנקודה הניל.

$$\text{המשיק הוא } 2x + 3y = 7.$$

מצאו את $f_x(2,1)$, $f_y(2,1)$, $f_x(1,0.5)$

9) תהי $(t) g$ פונקציה של משתנה אחד.

על הפונקציה g ידוע, כי $g(4) = 5$, $g(1) = 3$, $g'(8) = 2$

$$\text{המשתנה } t \text{ תלוי במשתנים החזיביים } (x, y), \text{ כך: } t = \frac{4y}{x}.$$

נגידר תועלת u כפונקציה של המשתנים (x, y) , באופן הבא:

$$u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$$

א. באյור שלහלן קרו עם שיפוע 1.

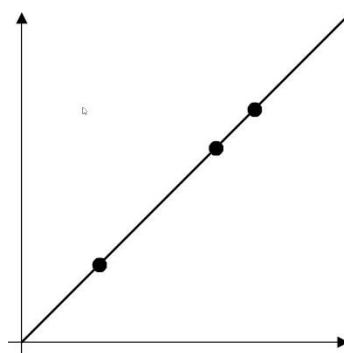
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרכן?

ב. הוכחו כי $\frac{\partial u}{\partial x}(0, -4) = -1$ היא עקומת אדישות של התועלת.

ציירו את הקרכן הזאת ורשמו באյור מה הערך של התועלת.

ג. הוכחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכחו כי $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, 2) = -16$.



10) נניח ש- $f(x, y) = f(x, y)$ הומוגנית מסדר 1.

$$\text{הוכחו כי } x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$$

11) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- אם $f_x(x, y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(y, x)$ הומוגנית מסדר 5.
- אם פונקציה $f(x, y)$ מקיימת $f(2, 4) = 2^3 f(1, 2)$, אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) א. שאלת הוכחה.

5) א. שאלת הוכחה.

$$-\frac{3}{4} \quad \text{(6)}$$

6) ג. שאלת הוכחה וסבירה.

ב. 12

א. $B(4, 8)$

$$f_x(2, 1) = \frac{108}{7}, \quad f_y(2, 1) = \frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}, \quad f_x(1, 0.5) = \frac{54}{7} \quad \text{ב. 2} \quad \text{א. 2} \quad \text{(8)}$$

9) א. 5 ב-ד. שאלות הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) א. הטענה אינה נכונה.

ב. הטענה אינה נכונה.